A Corrélations

Cette annexe est consacrée à la description d'une méthode générale permettant le calcul de la direction principale d'un nuage de points. Ce calcul est mis en pratique dans le chapitre 3, à l'occasion de l'établissement des algorithmes d'identification du vertex d'interaction et de recherche des événements avec interaction de fragments.

A.1 Introduction

Nous avons montré au chapitre 3 que, pour établir les seuils de déclenchement de l'algorithme de reconnaissance du vertex, on peut s'affranchir des calibrations relatives des voies gauches et droites en projetant les réponses q_j^d et q_j^g ($j \in [0 \cdots 7]$) sur la direction de la corrélation (q_j^d, q_j^g). La projection $\tilde{q}_j$ s'exprime simplement en fonction de l'angle θ_j de cette direction par :

$$\tilde{q}_j = \frac{1}{\sqrt{1+a_j^2}} \left(q_j^g + a_j \times q_j^d \right) \quad \text{avec } a_j = \tan(\theta_j).$$

Dans cette annexe, nous décrivons une méthode générale permettant le calcul de l'angle θ_j de la direction principale du nuage de points (q_j^d, q_j^g).

A.2 Calcul de l'angle de la direction principale du nuage de points

A.2.1 Notations

Nous désignons l'ensemble des points du nuage (q_j^d, q_j^g) par la variable :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \cdots \end{pmatrix}$$

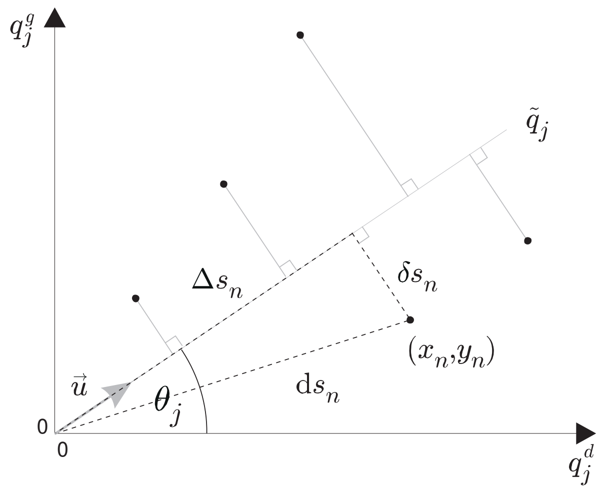

FIG. A.1 - « *Représentation partielle du nuage de points* (q_j^d, q_j^g). *La droite principale du nuage de points est la droite qui minimise la somme des carrés des distances* δs_n. »

Nous effectuons le calcul dans l'hypothèse que la direction du nuage de points suit une droite affine $y = a_j x$. Nous désignons par u le verteur directeur unitaire de cette droite.

La figure A.1 représente quelques points (x_n, y_n) du nuage, la droite principale que nous cherchons à déterminer, son vecteur directeur u et l'angle θ_j. La distance du point (x_n, y_n) à la droite principale est désignée par δs_n. La distance de la projection orthogonale de (x_n, y_n) sur la droite au point (0,0) est désignée par Δs_n et la distance de (x_n, y_n) au point (0,0) par $\mathrm{d}s_n$.

A.2.2 Principe du calcul

Nous définissons la droite principale comme étant la droite affine qui ajuste la distribution de points (x_n, y_n) au sens des moindres carrés. Nous cherchons donc la droite d'équation $y = a_j x$, de vecteur directeur unitaire u, qui minimise la somme des carrés des distances δs_n des points (x_n, y_n) à cette droite. La distance δs_n peut s'exprimer en fonction des distances $\mathrm{d}s_n$ et Δs_n définies sur la figure A.1 par :

$$\delta s_n = \sqrt{\mathrm{d}s_n^2 - \Delta s_n^2} = \sqrt{(x_n^2 + y_n^2) - \Delta s_n^2}$$

Il s'ensuit donc que minimiser la somme des carrés $\sum_n \delta s_n^2$ équivaut à maximiser la somme :

$$\sum_n \Delta s_n^2 = \sum_n [(x_n, y_n).u]^2 = (X.u)^\top (X.u) \tag{A.1}$$

A.2.3 Maximisation

Nous avons montré que la droite recherchée est celle dont le vecteur directeur unitaire u maximise la forme quadratique (A.1). Pour mener à bien cette maximisation, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour cela, nous introduisont la quantité :

$$\mathcal{L}[u] = u^\top X^\top X u - \lambda(u^\top u - 1)$$

Par construction, extrêmaliser le lagrangien $\mathcal{L}[u]$ (avec la condition d'unitarité $u^\top u = 1$) revient à extrêmaliser la forme (A.1). Or :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0\right) \implies 2X^\top X u - 2\lambda u = 0$$

Le calcul se réduit donc simplement à la résolution de l'équation aux valeurs propres :

$$X^\top X u = \lambda u \tag{A.2}$$

Si on définit les quantités a, b et c par :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$a = \sum_i x_i^2, \ b = \sum_i x_i y_i \quad \text{et} \quad d = \sum_i y_i^2$$

alors l'équation (A.2) possède les solutions suivantes :

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[c + a \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2}\right]$$

On peut alors montrer [Lebart82] que le vecteur propre u associé à la plus grande des deux valeurs propres λ_{max} est celui qui maximise la forme quadratique (A.1).

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2}\left[c + a + \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2}\right]$$

Le vecteur recherché est alors de la forme suivante :

$$u \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -b/(c - \lambda_{max}) \end{pmatrix}$$

Il est ensuite aisé de calculer l'angle θ_j de la droite affine de vecteur directeur u, qui est la droite définissant la direction principale du nuage de points recherché :

$$\boxed{\theta_j = \arctan\left(\frac{b}{\lambda_{max} - c}\right)} \tag{A.3}$$

Nous disposons ainsi d'une méthode automatique pour calculer les angles des directions principales des corrélations (q_j^d, q_j^g). Ces angles peuvent ensuite être utilisés par les algorithmes d'identification du vertex et de reconnaissance de réinteraction (voir chapitre 3).